PHƯƠNG TRÌNH TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN CHỨA ẨN Ở SỐ MŨ

Phạm Quang Toàn *

Ngày 18 tháng 2 năm 2014

Tóm tắt nội dung

Chúc mừng sinh nhật lần thứ 10 của Diễn đàn Toán học VMF (16/1/2003-16/1/2013).

Hiện nay, có nhiều đề thi toán quốc gia, quốc tế có xuất hiện dạng phương trình nghiệm nguyên có chứa ẩn ở số mũ. Bài viết này xin giới thiệu một số định hướng trong việc giải các bài toán dạng này.

1 Một số kiến thức và kí hiệu

Trước khi đọc bài viên, mọi người nên biết một số kiến thức như bổ đề LTE (xem ở [4] và [3]) hay kiến thức về cấp (xem ở [4]).
Kí hiệu $b|a$ hiểu là a chia hết cho b, còn nếu b không chia hết cho a thì ta viết $a \nmid b$.
Kí hiệu $p^a \parallel b$ hiểu là $p^a|b$ nhưng $p^{a+1} \nmid b$ với p nguyên tố. Lúc đó ta kí hiệu $v_p(b) = a$. Ví dụ như $v_2(36) = 2$.
Kí hiệu $\gcd(a, b)$ hiểu là ước chung lớn nhất của a và b.

2 Sử dụng đồng dư trong giải phương trình nghiệm nguyên

Kĩ thuật đầu tiên, ta sẽ sử dụng đồng dư để giải các bài toán phương trình nghiệm nguyên có chứa ẩn ở số mũ. Về các tính chất cơ bản của đồng dư, xin không nhắc lại, bạn đọc có thể tìm thêm trong các tài liệu lý thuyết số khác. Ta hãy bắt đầu bằng ví dụ sau:

Ví dụ 1. *Tìm nghiệm nguyên tự nhiên của phương trình* $|3^x - 2^y| = 1$. △

Lời giải.
Ta sẽ đi giải hai phương trình $3^x - 2^y = 1$ và $2^y - 3^x = 1$.

$$3^x - 2^y = 1 \tag{1}$$

Giải (1).

- Nếu $y = 0$ thì $3^x = 2$, mâu thuẫn.
- Nếu $y = 1$ thì $x = 1$.

*9C, THCS Đặng Thai Mai, Tp Vinh, Nghệ An.

- Nếu $y \geq 2$ thì $4|2^y$ nên $3^x \equiv 1 \pmod 4$, suy ra $x = 2x_1$ $(x_1 \in \mathbb{N}^*)$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (3^{x_1} - 1)(3^{x_1} + 1) = 2^y.$$

Đặt $3^{x_1} - 1 = 2^m, 3^{x_1} + 1 = 2^n$ với $m, n \in \mathbb{N}^*, m < n, m + n = y$ thì ta có $2^n - 2^m = 2^m(2^{n-m} - 1) = 2$. Từ đây ta có $m = 1, n = 2$ nên $y = 3, x = 2$.

$$2^y - 3^x = 1 \tag{2}$$

Giải (2). Nếu $x = 0$ thì $y = 1$.
Nếu $x \geq 1$. Nhận thấy $2^y \equiv 1 \pmod 3$ suy ra $y = 2y_1$ $(y_1 \in \mathbb{N}^*)$. Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow (2^{y_1} - 1)(2^{y_1} + 1) = 3^x$$

Vì $2^{y_1} - 1, 2^{y_1} + 1$ không cùng chia hết cho 3 mà $2^{y_1} - 1 < 2^{y_1} + 1$ nên $2^{y_1} - 1 = 1, 2^{y_1} + 1 = 3^x$.
Ta suy ra $y = 2, x = 1$.
Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương $(x, y) = (0, 1), (1, 1), (2, 3), (1, 2)$. ■

Nhận xét. Có thể phát biểu một cách khác cho bài toán trên: Tìm số nguyên dương N sao cho $N - 1, N, N + 1$ đều là lũy thừa của một số nguyên tố.

Ví dụ 2. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$3^x + 4^y = 5^z \tag{3}$$

△

Lời giải.
Với $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $3|3^x$ và $4^y \equiv 1 \pmod 3$. Do đó $5^z \equiv 1 \pmod 3$ suy ra z chẵn. Đặt $z = 2z_1$ $(z_1 \in \mathbb{N}^*)$. Phương trình tương đương với

$$(3) \Leftrightarrow (5^{z_1} - 2^y)(5^{z_1} + 2^y) = 3^x$$

Vì $(5^{z_1} + 2^y) - (5^{z_1} - 2^y) = 2^{y+1}$ nên $5^{z_1} - 2^y, 5^{z_1} + 2^y$ không thể cùng chia hết cho 3. Kết hợp với điều kiện $5^{z_1} - 2^y < 5^{z_1} + 2^y$ nên từ phương trình ta suy ra $5^{z_1} - 2^y = 1$ và $5^{z_1} + 2^y = 3^x$. Từ đó dẫn đến $\boxed{3^x - 2^{y+1} = 1}$. Theo ví dụ ban đầu nên ta có $x = 2, y = 2$. Ta tìm được $z = 2$. Vậy $(x, y, z) = (2, 2, 2)$. ■

Nhận xét. Qua hai bài toán trên, ta có thể thấy việc đưa ra nhân xét các tính chất đồng dư đã đưa phương trình ban đầu thành phương trình có vế phải là tích các số nguyên dương, vế trái là lũy thừa một số. Từ đó tiếp tục đặt các thừa số trong tích để đưa về các dạng phương trình mũ đơn giản hơn. Cụ thể là ở ví dụ trên, ta đã đưa việc giải phương trình nghiệm nguyên $3^x + 4^y = 5^z$ về giải phương trình nghiệm nguyên $3^x - 2^{y+1} = 1$.

Ví dụ 3 (Junior Balkan MO 2009). *Giải phương trình nghiệm nguyên không âm*

$$2^a 3^b + 9 = c^2 \tag{4}$$

△

LỜI GIẢI.
Nếu $b = 0$ thì (4) $\Leftrightarrow 2^a + 9 = c^2$. Từ đây ta suy ra $2^a \equiv 1 \pmod 3$ nên $a = 2a_1$ ($a_1 \in \mathbb{N}$). Do đó ta thu được $(c - 2^{a_1})(c + 2^{a_1}) = 9$. Vì $c - 2^{a_1}, c + 2^{a_1}$ không cùng chia hết cho 3 và $0 < c - 2^{a_1} < c + 2^{a_1}$ nên $c - 2^{a_1} = 1, c + 2^{a_1} = 9$. Từ đó ta tìm được $c = 5, a = 4$. Trường hợp này ta thu được $(a, b, c) = (4, 5, 0)$.

Nếu $b \geq 1$, với $b = 1$ ta có $3 \parallel VT$ nên không thể là số chính phương, mâu thuẫn. Do đó $b \geq 2$ nên $3|c$. Đặt $c = 3c_1$ ($c_1 \in \mathbb{N}$). Khi đó

$$(4) \Leftrightarrow (c_1 - 1)(c_1 + 1) = 2^a 3^{b-2}$$

Vì $c_1 - 1, c_1 + 1$ không cùng chia hết cho 3 nên ta có hai trường hợp:

1. Nếu $c_1 - 1 = 2^n 3^{b-2}, c_1 + 1 = 2^m$ với $m, n \in \mathbb{N}, m + n = a$. Từ đây ra suy ra $m > n$ vì $2^m > 2^n 3^{b-2} > 2^{n+b-2} \geq 2^n$. Khi đó

$$2^m - 2^n 3^{b-2} = 2 \tag{5}$$

   Nếu $m = n = 0$ thì $1 - 3^{b-2} = 2$, mâu thuẫn. Vậy $mn \geq 1$.
   Nhận thấy $2 \parallel 2^m - 2^n 3^{b-2}$ nên $n = 1$. Vậy (5) $\Leftrightarrow \boxed{2^{m-1} - 3^{b-2} = 1}$. Theo ví dụ ban đầu ta tính được $m = 3, b = 3$ suy ra $a = 4, c = 21$ hoặc $m = 2, b = 2$ suy ra $a = 3, c = 9$. Vậy $(a, b, c) = (4, 3, 21), (3, 2, 9)$.

2. Nếu $c_1 - 1 = 2^x, c_1 + 1 = 2^y \cdot 3^{b-2}$ với $x, y \in \mathbb{N}, x + y = a$. Ta có $2^y 3^{b-2} - 2^x = 2$. Với $x = y = 0$ thì $3^{b-2} = 3$ suy ra $b = 3$. Ta tìm được $c = 6$. Vậy $(a, b, c) = (0, 3, 6)$. Nếu $xy \geq 1$ thì ta có hai trường hợp nhỏ:

   - Nếu $x = 1$ thì $2^y 3^{b-2} = 4$ dẫn đến $y = 2, b = 2$. Ta suy ra $c = 9$. Vậy $(a, b, c) = (3, 2, 9)$.
   - Nếu $y = 1$ thì $\boxed{3^{b-2} - 2^{x-1} = 1}$. Theo bài toán ban đầu ta thu được $b = 3, x = 2$ hoặc $b = 4, x = 4$. Từ đó ta suy ra $(a, b, c) = (3, 3, 15), (5, 4, 51)$.

Vậy phương trình (4) có 6 nghiệm nguyên không âm $(a, b, c) = (4, 5, 0), (4, 3, 21), (3, 2, 9), (0, 3, 6), (3, 3, 15), (5, 4, 51)$. ■

NHẬN XÉT. Ở bài toán trên, ta đã đưa phương trình cần giải $2^a 3^b + 9 = c^2$ về việc giải $|3^x - 2^y| = 1$.

Ví dụ 4. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương*

$$2^x 3^y + 5^z = 7^t \tag{6}$$

△

PHÂN TÍCH. Ta sẽ đi tìm tính chẵn lẻ của x, y, z, t. Để ý nếu xét theo $\pmod 3$ thì ta suy ra $5^z \equiv 1 \pmod 3$ dẫn đến z chẵn. Nếu t chẵn thì ta sẽ đưa được về dạng $A \cdot B = 2^x 3^y$ từ đó đưa phương trình về dạng đơn giản hơn. Tuy nhiên, xét theo $\pmod 4$ thì t chẵn khi $x \geq 2$. Do đó ta sẽ đi xét trường hợp nhỏ $x = 1$.

Lời giải.
Vì $7^t \equiv 1 \pmod 3$ nên $5^z \equiv 1 \pmod 3$. Vậy z chẵn Đặt $z = 2z_1$ $(z_1 \in \mathbb{N}^*)$.

Nếu $x = 1$ thì

$$(6) \Leftrightarrow 2 \cdot 3^y + 5^z = 7^t.$$

Vì $5^z \equiv 1 \pmod 4, 2 \cdot 3^y \equiv 2 \pmod 4$ nên $7^t \equiv 3 \pmod 4$. Vậy t lẻ. Khi đó $7^t \equiv 7 \pmod{24}$. Ta cũng có $5^z \equiv 1 \pmod{24}$ (vì z chẵn) nên $2 \cdot 3^y \equiv 6 \pmod{24}$ suy ra $3^{y-1} \equiv 1 \pmod 4$. Vậy y lẻ.
Ta có y, t lẻ nên $3^y \equiv 3, 2 \pmod 5, 7^t \equiv 2, 3 \pmod 5$. Khi đó $2 \cdot 3^y + 5^z \equiv 1, 4 \pmod 5$, mâu thuẫn.

Nếu $x \geq 2$ thì $4 | 2^x 3^y$ và ta cũng có $5^z \equiv 1 \pmod 4$ nên $7^t \equiv 1 \pmod 4$. Do đó t chẵn, đặt $t = 2t_1$ $(t_1 \in \mathbb{N}^*)$. Khi đó

$$(6) \Leftrightarrow \left(7^{t_1} - 5^{z_1}\right)\left(7^{t_1} + 5^{z_1}\right) = 2^x 3^y.$$

Vì $7^{t_1} - 5^{z_1}$ và $7^{t_1} + 5^{z_1}$ không cùng chia hết cho 3 nên ta có hai trường hợp:

1. Nếu $\begin{cases} 7^{t_1} - 5^{z_1} = 2^m \\ 7^{t_1} + 5^{z_1} = 2^n 3^y \end{cases}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*; m + n = x)$. Ta suy ra $2^n 3^y - 2^m = 2 \cdot 5^{z_1}$ và $2^n 3^y + 2^m = 2 \cdot 7^{z_1}$. Do đó hoặc $n = 1$ hoặc $m = 1$.

    - Nếu $n = 1$ thì $\begin{cases} 3^y - 2^{m-1} = 5^{z_1} \\ 3^y + 2^{m-1} = 7^{t_1} \end{cases}$. Vì $7^{t_1} \equiv 1 \pmod 3$ nên $2^{m-1} \equiv 1 \pmod 3$. Vậy $m - 1$ chẵn. Và hiển nhiên $m - 1 \geq 1$ nên ta suy ra $4 | 2^{m-1}$. Do đó $3^y \equiv 1 \pmod 4$. Vậy y chẵn. Đặt $y = 2y_1$ $(y_1 \in \mathbb{N}^*)$. Như vậy

    $$3^y - 2^{m-1} = 5^{z_1} \Leftrightarrow \left(3^{y_1} - 2^{\frac{m-1}{2}}\right)\left(3^{y-1} - 2^{\frac{m-1}{2}}\right) = 5^z.$$

    Vì $3^{y_1} - 2^{\frac{m-1}{2}}$ và $3^{y_1} + 2^{\frac{m-1}{2}}$ không cùng chia hết cho 5 nên $\boxed{3^{y_1} - 2^{\frac{m-1}{2}} = 1}$ và $3^{y_1} + 2^{\frac{m-1}{2}} = 5^z$. Từ đó ta tìm được $y_1 = 1, m = 3$. Tuy nhiên, ta lại không tìm được x, y thỏa mãn.

    - Nếu $m = 1$ thì $\begin{cases} 2^{n-1} 3^y - 1 = 5^{z_1} \\ 2^{n-1} 3^y + 1 = 7^{t_1} \end{cases}$. Nhận thấy $5^{z_1} + 1 \equiv 2 \pmod 4$ nên $n = 2$. Khi đó $7^{t_1} - 1 = 2 \cdot 3^y$. Theo bổ đề LTE ta có

    $$v_3(7^{t_1} - 1) = v_3(6) + v_3(t_1) = 1 + v_3(t_1) = y.$$

    Đặt $t_1 = 3^q \cdot k$ với $q, k \in \mathbb{N}, k \geq 1, (k, 3) = 1$ thì $y = q + 1$. Khi đó dễ dàng chứng minh bằng quy nạp $7^{t_1} - 1 = 7^{3^q \cdot k} - 1 > 2 \cdot 3^{q+1}$ với $q \geq 1$. Do đó $q = 0$. Ta tìm được $k = 1$. Do đó $t = 2, y = 1, x = 3, z = 2$. Thử lại, $2^3 \cdot 3 + 5^2 = 7^2$, thỏa mãn.

2. Nếu $\begin{cases} 7^{t_1} - 5^{z_1} = 2^m \cdot 3^y \\ 7^{t_1} + 5^{z_1} = 2^n \end{cases}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*; m + n = x; n > m)$. Do đó $2^n - 2^m 3^y = 2 \cdot 5^{z_1}$. Vì $n > m$ nên $m = 1$. Do đó $2^{n-1} - 3^y = 5^{z_1}$ và $7^{t_1} = 3^y + 2^{n-1}$. Vì $7^{t_1} \equiv 1 \pmod 3$ nên $2^{n-1} \equiv 1 \pmod 3$, suy ra $n - 1$ chẵn và $n - 1 \geq 2$.

Như vậy $2^{n-1} - 3^y \equiv 1 \pmod 3$ nên $5^{z_1} \equiv 1 \pmod 3$. Vậy z_1 chẵn. Đặt $z_1 = 2z_2$ ($z_1 \in \mathbb{N}^*$). Khi đó

$$2^{n-1} - 3^y = 5^{z_1} \Leftrightarrow \left(2^{\frac{n-1}{2}} - 5^{z_2}\right)\left(2^{\frac{n-1}{2}} + 5^{z_2}\right) = 3^y.$$

Lập luân tương tự ta suy ra $2^{\frac{n-1}{2}} - 5^{z_2} = 1, 2^{\frac{n-1}{2}} + 5^{z_2} = 3^y$. Do đó $\boxed{2^{\frac{n+1}{2}} - 3^y = 1}$. Khi đó $y = 1, n = 3$ suy ra $5^{z_1} = 1$, mâu thuẫn.

Vậy phương trình (6) có nghiệm nguyên dương duy nhất $(x, y, z, t) = (3, 1, 2, 2)$. ■

Nhận xét. Ta có thể nhân thấy bài toán trên là các đánh giá linh hoạt về tính chẵn lẻ của ẩn qua việc sử dụng môđun, qua đó đưa về phương trình tích, làm đơn giản hóa phương trình để giải.
Hơn nữa, các mođun mà ta sử dụng trong bài toán trên đều có liên quan đến các con số trong phương trình $(2, 3, 5, 7)$. Ta có thể nói các mođun này có "mối quan hệ" với phương trình.

2.1 Hai kĩ thuật nhỏ trong việc lựa chọn môđun

Ta thấy rằng hầu hết các lời giải trên đều phải trải qua hai quy trình: Thứ nhất là sử dụng mođun (chủ yếu là dùng mođun có "mối quan hệ" với phương trình) để chỉ ra tính chẵn lẻ, hay cùng chia hết cho một số nguyên tố p nào đó của các ẩn. Và thứ hai là đưa phương trình về phương trình tích để giải.

Tất nhiên, không phải tất cả bài toán có phương trình chứa ẩn ở số mũ đều có thể giải quyết bằng hai quy trình trên. Và do đó ta sẽ gặp hai khó khăn khi đối diện với bài toán không thể giải được khi áp dụng hai quy trình trên:

1. Việc lựa chọn mođun ngoài ý muốn, tức là ngay cả khi sử dụng các mođun có "mối quan hệ" ta vẫn không tìm được cách xử lí bài toán. Và các lời giải của các bài toán mình sắp đưa ra dưới đây, hoàn toàn có thể nói rằng mođun được sử dụng trong các bài toán đó hoàn toàn không có bất kì "đặc điểm nhận dạng" nào đối với phương trình đó.

2. Việc đưa về phương trình tích khó có thể dẫn đến lời giải hoàn chỉnh. Thậm chí một số bài không thể đưa thành phương trình tích.

Kĩ thuật này phần nào có thể giải đáp giúp mọi người phần nào về hai vấn đề trên.

2.1.1 Kĩ thuật 1

Trước hết, ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 5. *Tìm các số nguyên dương m, n thỏa mãn $9^m - 7^n = 2$.* △

Lời giải.
Nhận thấy $(m, n) = (1, 1)$ là một nghiệm. Ta sẽ chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên với $m \geq 2$. Khi đó $27 | 9^m$ nên $7^n \equiv 25 \pmod{27}$. Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 1.
Cho n là số nguyên dương thì $ord_{3^n}(7) = 3^{n-1}$. □

Chứng minh.
Gọi A là tập các số dạng $3^i \cdot k$ sao cho $7^{3^i \cdot k} \equiv 1 \pmod{3^n}$ với $i, k \in \mathbb{N}, k \geq 1, \gcd(k, 3) = 1$. Khi đó theo bổ đề LTE ta có

$$v_3\left(7^{3^i \cdot k} - 1\right) = v_3(7-1) + v_3(3^i \cdot k) = i + 1 \geq n \Rightarrow i \geq n - 1.$$

Ta suy ra $3^i \cdot k \geq 3^{n-1}$. Vậy trong tập A số nhỏ nhất là 3^{n-1}. Do đó $\mathrm{ord}_{3^n}(7) = 3^{n-1}$. ■

Quay lại bài toán, theo bổ đề ta suy ra $7^9 \equiv 1 \pmod{27}$. Để $7^n \equiv 25 \pmod{27}$ thì $n \equiv 4 \pmod{9}$.
Bây giờ ta đi tìm số nguyên tố p sao cho $\mathrm{ord}_p(7) = 9$. Để ý rằng $7^9 - 1 = (7^3-1)(7^6+7^3+1)$. Để số nguyên tố p thỏa mãn thì $p | 7^6 + 7^3 + 1$. Ta có $7^6 + 7^3 + 1 = 37 \cdot 3 \cdot 1063$. Để phù hợp tính toán, ta chọn $p = 37$. Vì $n \equiv 4 \pmod{9}$ nên $7^n \equiv 7^4 \equiv 33 \pmod{37} \Rightarrow 9^m \equiv 35 \pmod{37}$.

Bây giờ cần tìm a để $\mathrm{ord}_{37}(9) = a$. Và ta tìm được $a = 9$. Bây giờ ta xét $m \equiv r \pmod{9}$ với $r = 1, 2, \cdots, 8$.

r	$9^m \pmod{37}$
0	1
1	9
2	7
3	26
4	12
5	34
6	10
7	16
8	33

Như vậy, ta luôn có $9^m \not\equiv 35 \pmod{37}$, mâu thuẫn. Vậy phương trình có nghiệm nguyên duy nhất $(m, n) = (1, 1)$. ■

Nhận xét. Ở lời giải trên, ta dự đoán rằng phương trình có nghiệm nguyên duy nhất $(m, n) = (1, 1)$, từ đó ta đi chứng minh $m, n \geq 2$ phương trình không có nghiệm nguyên. Và phân tích trên đã cho ta thấy đường lối rõ ràng trong việc lựa chọn môđun 37.

Ví dụ 6. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương $2^x - 5 = 11^y$.* △

Lời giải.
Dễ nhận thấy $(x, y) = (4, 1)$ là một nghiệm của phương trình. Ta sẽ đi chứng minh phương trình không có nghiệm với $x \geq 5$. Với $x = 5$ phương trình vô nghiệm. Với $x \geq 6$ thì $64 | 2^x$ nên $11^y \equiv 59 \pmod{64}$. Dễ dàng chứng minh được $\mathrm{ord}_{2^n}(11) = 2^{n-2}$ theo bổ đề LTE nên $11^{16} \equiv 1 \pmod{64}$. Ta suy ra $y \equiv 13 \pmod{16}$.

Ta cần tìm số nguyên tố p thỏa mãn $\mathrm{ord}_p(11) = 16$. Ta có $11^{16} - 1 = (11^8 - 1)(11^8 + 1)$ suy ra $p | 11^8 + 1$ và $11^8 + 1 = 2 \cdot 17 \cdot 6304673$. Ta chọn $p = 17$. Khi đó $11^y \equiv 11^{y \pmod{16}} \equiv 11^{13} \equiv 7 \pmod{17}$. Ta có $2^x \equiv 12 \pmod{17}$.
Bây giờ ta đi tìm a để $\mathrm{ord}_{17}(2) = a$. Ta tìm được $a = 8$, tức $2^8 \equiv 1 \pmod{17}$. Bây giờ ta

sẽ đi xét số dư của x khi chia cho 8: $x \equiv r \pmod 8$ với $r = 0, 1, 2, \cdots, 7$. Ta có bảng sau:

r	$2^x \pmod{17}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	15
6	13
7	9

Ta luôn có $2^x \not\equiv 12 \pmod{17}$ với mọi $x \geq 6$ nên phương trình không có nghiệm nguyên trong trường hợp này. Vậy $(x, y) = (4, 1)$. ■

Nhận xét. Tạ không không đi xét từ $x \geq 5$ mà khởi điểm từ $x \geq 6$ vì nếu với $x \geq 5$, ta suy ra $32|2^x$, từ đó để chọn mođun p. Tuy nhiên, trong trường hợp này, số p quá lớn. Do đó tốt nhất ta nên bắt đầu từ $x \geq 6$. Ta cũng có thể đi tìm mođun cho bài toán từ điều giả sử $y \geq 2$ nhưng giá trị mođun tìm được không hề nhỏ. Như vậy, trong kĩ thuật này, ta phải linh hoạt trong việc chọn hướng tìm mođun sao cho mođun tìm được đủ "tầm cỡ" để ta có thể giải quyết bài toán mà không mắc phải những tính toán lớn.

Ví dụ 7. *Giải phương trình nghiệm nguyên không âm $33^x + 31 = 2^y$.* △

Lời giải (1).
Nhận thấy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x, y) = (0; 5), (1; 6)$. Ta sẽ đi chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên với $x \geq 3$ (với $x = 2$ thì không tồn tại y thỏa mãn). Khi đó $y \geq 7$.
Ta có $27|33^x$ nên $2^y \equiv 4 \pmod{27}$. Dễ chứng minh được $\text{ord}_{3^n}(2) = 2 \cdot 3^{n-1}$ theo bổ đề LTE nên $2^{18} \equiv 1 \pmod{27}$. Do đó $y \equiv 2 \pmod{18}$. Theo định lý Fermat nhỏ thì $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ nên $2^y \equiv 4 \pmod{19}$ (ta chọn $p = 19$). Khi đó $33^x \equiv 16 \pmod{19}$.
Để ý rằng $\text{ord}_{19}(33) = 18$. Ta sẽ xét số dư của x khi chia cho 18.

- Vì $y \equiv 2 \pmod{18}$ nên $y \equiv 2 \pmod 3$. Do đó $2^y \equiv 4 \pmod 7$. Ta suy ra $33^x \equiv 1 \pmod 7$ nên $3|x$.
- Dễ dàng chứng minh được $\text{ord}_{2^n}(33) = 2^{n-5}$ theo bổ đề LTE. Do đó nếu x chẵn và $x \geq 3$ nên $33^x \equiv 1 \pmod{2^6} \Rightarrow 33^x + 31 \equiv 2^5 \pmod{2^6}$. Suy ra $y = 5$, mâu thuẫn. Vậy x lẻ.

Từ hai điều kiện trên suy ra $x \equiv 3 \pmod 6$ nên $x \equiv 3, 9, 15 \pmod{18}$. Tuy nhiên, cả ba trường hợp này đều dẫn tới $33^x \not\equiv 16 \pmod{19}$. Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x, y) = (0; 5), (1; 6)$. ■

Lời giải (2).
Ta sẽ đi chứng minh phương trình không có nghiệm với $y \geq 7$. Lúc đó thì $128|2^y$ nên $33^x \equiv 97 \pmod{128}$.
Ta có $\text{ord}_{2^n}(33) = 2^{n-5}$ nên $33^4 \equiv 1 \pmod{128}$. Do đó $x \equiv 3 \pmod 4$.

Ta đi tìm số nguyên tố p sao cho $\text{ord}_p(33) = 4$ suy ra $p|33^2 + 1$. Khi đó $p = 109$. Quả thực p rất lớn nên các bước giải tiếp theo chắc chắn sẽ gặp trở ngại về tính toán. Ta

mạnh dạn không thấy số p thỏa mãn $\mathrm{ord}_p(33) = 4$ mà thay vào đó chỉ cần lấy $p|33^4 - 1$, tức có thể tìm p thỏa mãn $p|33^2 - 1 = 2^6 \cdot 7$. Ta chọn $p = 17$. Khi đó $33^4 \equiv 1 \pmod{17}$ nên $33^x \equiv 33^3 \equiv 16 \pmod{17}$. Ta suy ra $2^y \equiv 13 \pmod{17}$.
Để ý rằng $\mathrm{ord}_{17}(2) = 8$ nên ta xét trường hợp của y khi chia cho 8. $y \equiv r \pmod 8$ với $r = 0, 1, 2 \cdots, 7$. Ta có bảng sau:

r	$2^y \pmod{17}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	15
6	13
7	9

Từ bảng trên ta suy ra $y \equiv 6 \pmod 8$.
Để ý rằng $33^x \equiv 0 \pmod{11}$ nên $2^y \equiv 9 \pmod{11}$. Ta lại có $\mathrm{ord}_{11}(2) = 10$ nên suy ra $y \equiv 6 \pmod{10}$.
Kết hợp với $y \equiv 6 \pmod 8$ thì $y \equiv 6 \pmod{40}$. Ta suy ra $2^y \equiv 2^6 \equiv 23 \pmod{41}$. Khi đó $33^x \equiv 33 \pmod{41}$. Lại có $33^{40} \equiv 1 \pmod{41}$ nên $x \equiv 1 \pmod{40}$, điều này mâu thuẫn với điều ta vừa chứng minh ở trên: $x \equiv 3 \pmod 4$.
Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x, y) = (0; 5), (1; 6)$. ■

2.1.2 Kĩ thuật 2

Ở kĩ thuật này , mình xin không bình luận nhiều, vì chính lời giải đã thể hiện rõ nội dung của kĩ thuật. Mình xin giới hiệu ba lời giải khác cho ba ví dụ được nêu ở kĩ thuật 1.

Lời giải (Ví dụ 5).
Ta xét với $m, n \geq 2$. Phương trình tương đương với

$$9\left(9^{m-1} - 1\right) = 7\left(7^{n-1} - 1\right).$$

Khi đó $7|3^{2m-2} - 1$ nên $3|m - 1$. Mà $2^3 \cdot 7 \cdot 13 = 3^6 - 1|3^{2m-2} - 1$ nên $2^3 \cdot 13|7^{n-1} - 1$ suy ra $6|n - 1$.
Vì $2^4 \cdot 3^2 \cdot 19 \cdot 43 = 7^6 - 1|7^{n-1} - 1$ nên ta cần $43|3^{2m-2} - 1$. Vậy $42|2m - 2$. Điều đó có nghĩa là $7^2|3^{42} - 1|3^{2m-2} - 1$, mâu thuẫn.
Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương $(m, n) = (1; 1)$. ■

Lời giải (Ví dụ 6).
Xét với $x \geq 5, y \geq 2$ thì phương trình trở thành

$$2^4\left(2^{x-4} - 1\right) = 11\left(11^{y-1} - 1\right).$$

Từ phương trình ta suy ra $2^4|11^{y-1} - 1$ nên $4|y - 1$. Do đó $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 61 = 11^4 - 1|11^{y-1} - 1$. Ta phải có $3 \cdot 5 \cdot 61|2^{x-4} - 1$ nên $60|x - 4$. Như vậy thì $41|2^{60} - 1|2^{x-4} - 1$ nên ta phải có $41|11^{y-1} - 1$. Từ đó dẫn đến $40|y - 1$. Khi đó ta suy ra $2^5|11^{y-1} - 1$ trong khi $2^4 \parallel 11^{y-1} - 1$, mâu thuẫn.
Vậy $(x, y) = (4; 1)$. ■

Lời giải (Ví dụ 7).
Xét vời $y \geq 7, x \geq 2$ thì phương trình tương đương với

$$33(33^{x-1}-1) = 2^6(2^{y-6}-1).$$

Ta suy ra $2^6|33^{x-1}-1$ nên $2|x-1$ nên $2^6 \cdot 17 = 33^2-1|33^{x-1}-1$ nên ta phải có $17|2^{y-6}-1$. Do đó $8|y-6$ nên $5|2^8-1|2^{y-6}-1$. Do đó $5|33^{x-1}-1$ suy ra $4|x-1$. Ta sẽ có $2^7|33^{x-1}-1$, mâu thuẫn vì $2^6 \parallel 33^{x-1}-1$.
Vậy phương trình có nghiệm nguyên không âm $(x, y) = (0; 5), (1; 6)$. ■

2.2 Bài tập vận dụng kĩ thuật chọn mođun

Bài 1. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} x^y + y^x = z^y \\ x^y + 2012 = y^{z+1} \end{cases}$.

Bài 2. Giải phương trình nghiệm nguyên không âm $2^x + 2009 = 3^y5^z$.

Bài 3. (Iran 2005) Tìm tất cả các số tự nhiên n, p, q thỏa mãn $2^n + n^2 = 3^p7^q$.

Bài 4. (Serbia MO 2008) Giải phương trình nghiệm nguyên không âm $12^x + y^4 = 2008^z$.

Bài 5. (IMO Shortlist 2010) Tìm cặp số nguyên không âm (x, y) thỏa mãn $m^2 + 2 \cdot 3^n = m\left(2^{n+1}-1\right)$.

Bài 6. (Turkey NMO 2001) Tìm cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $3^x + 11^y = z^2$.

Bài 7. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $2^t = 3^x5^y + 7^z$.

Bài 8. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $3^x + 4^y = 7^z$.

Bài 9. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $2^x = 5^z - 3^y$.

3 Sử dụng đánh giá trong giải phương trình nghiệm nguyên

Ta bắt đầu bằng việc xét bài toán sau:

Ví dụ 8 (VMO 2004). *Tìm tất cả bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn hệ thức*

$$(x+y)(1+xy) = 2^z \tag{7}$$

△

Lời giải.
Nếu phương trình (7) có nghiệm nguyên $(x, y, z) = (a, b, c)$ thì phương trình đó cũng có nghiệm nguyên $(x, y, z) = (b, a, c)$. Do đó, không mất tính tổng quát, giả sử $x \leq y$.
Từ (7) ta suy ra tồn tại số nguyên dương m sao cho $m < z$ và thỏa mãn $x + y = 2^m, xy + 1 = 2^{z-m}$.
Ta có $(xy+1) - (x+y) = (x-1)(y-1) \geq 0$ nên $2^{z-m} \geq 2^m$ suy ra $m \leq \frac{z}{2}$.

1. Nếu $x = 1$ thì $y + 1 = 2^{z-m} = 2^m$ nên $z = 2m$. Khi đó $y = 2^m - 1$. Ta kiểm tra thấy bộ số $(x, y, z) = (1, 2^m - 1, 2m)$ thỏa mãn (7).

2. Nếu $x \geq 2$. Ta có $x^2 - 1 = x(x+y) - (xy+1) = 2^m \cdot x - 2^{z-m} = 2^m(x - 2^{z-2m})$. Từ đây ta suy ra $2^m | (x-1)(x+1)$. Mặt khác $\gcd(m-1, m+1) = 2$ nên tồn tại một trong hai số $x-1, x+1$ chia hết cho 2^{m-1}.

   Nếu $2^{m-1} | x-1$ thì vì $x \geq 2$ nên $x \geq 2^{m-1}+1$. Mà $x+y = 2^m$ nên $y \leq 2^{m-1} - 1 < x$, mâu thuẫn với điều giả sử trên. Vậy $2^{m-1} | x+1$ nên $x \geq 2^{m-1} - 1$. Ta cũng lại có $x + y = 2^m$ nên $y \leq 2^{m-1} + 1$. Mà $y \geq x$ nên

$$2^{m-1} - 1 \leq x \leq y \leq 2^{m-1} + 1. \tag{8}$$

   Để ý rằng từ (7) ta suy ra y lẻ nên từ (8) ta suy ra $y = 2^{m-1} - 1$ hoặc $y = 2^{m-1} + 1$.

   - Với $y = 2^{m-1} - 1$ thì $x = 2^{m-1} + 1$, mâu thuẫn vì $x \leq y$.
   - Với $y = 2^{m-1}+1$ thì $x = 2^{m-1}-1$. Khi đó $2^{z-m} = xy+1 = 2^{2m-2} \Rightarrow z = 3m-2$.

   Vì x lẻ nên $x \geq 3$. Do đó $2^{m-1} = x + 1 \geq 4$ nên $m \geq 3$.

Vậy tất cả các bộ số nguyên dương (x, y, z) cần tìm là:

$x = 1; y = 2^m - 1; z = 2m$ với $m \in \mathbb{N}^*$.

$x = 2^m - 1; y = 1; z = 2m$ với $m \in \mathbb{N}^*$.

$x = 2^{m-1} - 1, y = 2^{m-1} + 1, z = 3m - 2$ với $m \in \mathbb{N}^*, m \geq 3$.

$x = 2^{m-1} + 1, y = 2^{m-1} - 1, z = 3m - 2$ với $m \in \mathbb{N}^*, m \geq 3$. ■

Nhận xét. Bắt đầu với việc sắp thứ tự ẩn ($x \leq y$) và $|A| \geq B$ nếu $B|A$ ($A \neq 0$), ta đã hướng bài toán tới một đánh giá kẹp (8). Và từ đánh giá này, ta dễ dàng tìm được nghiệm nguyên cho phương trình (7).
Do đó, trong các kĩ thuật đánh giá để giải phương trình nghiệm nguyên có chứa ẩn ở số mũ, ta nên để ý tới kĩ thuật sắp thứ tự ẩn và nhận xét $|A| \geq B$ nếu $B|A$ ($A \neq 0$). Hai kĩ thuật này sẽ giúp việc đánh giá đạt hiệu quả hơn.

Ví dụ 9. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$(x+1)^y - 1 = x! \tag{9}$$

△

Lời giải.
Nhận thấy $(x, y) = (1; 1), (2; 1)$ là hai nghiệm nguyên của phương trình. Ta xét với $x \geq 4$. Khi đó

$$(9) \Leftrightarrow x^{y-1} + yx^{y-2} + C_y^2 x^{y-3} + \cdots + y = (x-1)! \tag{10}$$

Nếu x lẻ thì $(x+1)^y - 1$ là số lẻ, mà $x!$ chẵn (do $x \geq 3$), điều này mâu thuẫn. Vậy x chẵn. Khi đó ta suy ra x là hợp số, dẫn đến $x = ab$ với $a, b \in \mathbb{N}^*; x - 1 > a, b \geq 2$ nên ta luôn có $x | (x-1)!$. Do đó từ (10) ta suy ra $x | y$ mà $x, y \geq 1$ nên $y \geq x$. Khi đó thì

$$(x+1)^y \geq (x+1)^x \geq x^x + 1 > x! + 1,$$

điều này mâu thuẫn với (9). Trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên dương.
Vậy phương trình (9) có nghiệm nguyên dương $(x, y) = (1; 1), (2; 1)$. ■

Nhận xét. Bài toán trên là minh họa cho kĩ thuật đánh giá hai vế của phương trình trong giải phương trình nghiệm nguyên chứa ẩn ở số mũ.

Ví dụ 10. *Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $y^{x^2} = x^{y+2}$.* △

Lời giải.
Nhận thấy $(x, y) = (1; 1)$ là một nghiệm nguyên của phương trình.
Nếu $x, y \geq 2$. Ta giả sử rằng tồn tại số nguyên dương $d \geq 2$ thỏa mãn $d|x, d \nmid y$ thì khi đó $d|x^{y+2}$ nhưng $d \nmid y^{x^2}$, điều này mâu thuẫn. Vậy không tồn tại số nguyên dương d nói trên. Do đó x, y có thể viết lại dưới dạng $x = n^a, y = n^b$ với $n, a, b \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Khi đó phương trình trở thành

$$n^{b \cdot n^{2a}} = n^{a \cdot \left(n^b+2\right)} \Rightarrow b \cdot n^{2a} = a \cdot \left(n^b + 2\right). \qquad (11)$$

Nếu $b = 1$ thì (11) trở thành $n^{2a} = a(n + 2)$ với $n \geq 2, a \geq 1$. Ta sẽ đi chứng minh quy nạp theo a rằng với $n \geq 2, a \geq 1$ thì $n^{2a} \geq a(n + 2)$.

Chứng minh.

- *Với $a = 1$ thì $n^{2a} = n^2 \geq a(n + 2) = n + 2 \Leftrightarrow (n - 2)(n + 1) \geq 0$, đúng vì $n \geq 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n = 2$.*
- *Với $a \geq 2$, giả sử bất đẳng thức đúng đến $a = k \geq 2$ thì $n^{2k} \geq k(n + 2)$. Ta sẽ đi chứng minh $n^{2(k+1)} \geq (k + 1)(n + 2)$. Thật vậy, ta có*

$$n^{2(k+1)} = n^{2k} \cdot n^2 \geq n^2 k(n + 2) > (k + 1)(n + 2),$$

tức bất đẳng thức cũng đúng với $a = k + 1$.

Vậy $a^{2n} \geq a(n+2)$ với $n \geq 2, a \geq 1$ và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1, n = 2$. ■

Như vậy với $b = 1$ thì $n^{2a} = a(n + 2)$ suy ra $n = 2, a = 1$. Ta tìm được $(x, y) = (2; 2)$.

Nếu $b \geq 2$. Với n chẵn thì ta suy ra $\gcd\left(n^{2a}, n^b + 2\right) = 2$ và $2 \parallel n^b + 2$. Do đó từ (11) ta dẫn đến $\dfrac{n^b + 2}{2} | b$ suy ra $b \geq \dfrac{n^b + 2}{2}$. Như vậy

$$2b \cdot n^{2a} \geq n^{2a} \cdot (n^b + 2) > 2a(n^b + 2),$$

mâu thuẫn với (11) (ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp $n^{2a} > 2a$ với $a \geq 1, n \geq 2$).
Với n lẻ thì $\gcd\left(n^{2a}, n^b + 2\right) = 1$ nên từ (11) ta dẫn đến $n^b + 2|b$, điều này mâu thuẫn vì $n^b + 2 > b \geq 1$.
Vậy phương trình (10) có nghiệm nguyên dương $(x, y) = (1; 1), (2; 2)$. ■

Ví dụ 11. *Tìm các số nguyên tố (p, q) thỏa mãn $2p^q - q^p = 7$.* △

Lời giải.
Nếu $p = q$ thì $p^p = 7$, mâu thuẫn. Vậy $p \neq q \neq 7$ nên $\gcd(p, q) = 1$.
Áp dụng định lý Fermat nhỏ ta có $p^q \equiv p \pmod q$ mà $q|2p^q - 7$ nên $q|2p - 7$. Và $q^p \equiv q \pmod p$ mà $p|q^p + 7$ nên $p|q + 7$.

Từ $p|q+7$ và $q|2p-7$ ta suy ra $pq|(q+7)(2p-7)$ nên $pq|2p-q-7$. Do đó $|2p-q-7| \geq pq$.

1. Nếu $2p-q-7>0$ thì $2p-q-7 \geq pq \Leftrightarrow (p+1)(q-2) \leq -9$, điều này mâu thuẫn vì $p,q \geq 2$.

2. Nếu $2p-q-7=0$ thì ta thấy $(p,q)=(5;3)$ thỏa mãn. Nếu $p \geq 7$, phương trình trở thành
$$2p^{2p-7}-(2p-7)^p=7. \tag{12}$$
Ta sẽ đi chứng minh $p^{2p-7} \geq (2p-7)^p$với $p \geq 7$.
Đầu tiên, ta đi chứng minh $(2p)^{p-7} > 2^{2p-7}$. Xét với $p \geq 16$ thì
$$(2p)^{p-7} \geq (2^5)^{p-7} = 2^{5p-35} > 2^{2p-7} \Rightarrow (2p)^{p-7} > 2^{2p-7}.$$
Lại có $(2p)^p > (2p-7)^p$ nên $(2p)^{p-7} \cdot (2p)^p > (2p-7)^p \cdot 2^{2p-7}$. Do vậy $p^{2p-7} > (2p-7)^p$ với $p \geq 16$. Còn thử với $7 \leq p \leq 16$ thì hiển nhiên đúng. Do đó
$$2p^{2p-7} \geq 2(2p-7)^p > (2p-7)^p + 7.$$
Khi đó phương trình (12) không có nghiệm.

3. Nếu $2p-q-7<0$ thì $q+7-2p \leq pq \Leftrightarrow (p-1)(q+2) \leq 5$. Vì q lẻ nên $q=3$ và $p=2$, thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(p,q)=(5;3),(2;3)$. ■

Ví dụ 12 (Junior Balkan MO 2000). *Tìm số tự nhiên n sao cho 3^n+n^2 là số chính phương.* △

Lời giải.
Đặt $3^n+n^2=a^2$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $n=3^p \cdot q$ với $p,q \in \mathbb{N}, q \geq 1, \gcd(3,q)=1$. Ta có $3^p \cdot q > 2p$ nên $3^p | n^2+3^n$. Ta suy ra $3^p | a$. Đặt $a=3^p \cdot k$ với $p,k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Khi đó phương trình trở thành
$$q^2+3^h=k^2 \Leftrightarrow (k-q)(k+q)=3^h.$$
với $h=3^p \cdot q-2p \in \mathbb{N}, 3 \nmid q, 3 \nmid k$.
Đặt $k-q=3^a, k+q=3^b$ với $a,b \in \mathbb{N}, a<b, a+b=h$. Khi đó $3^a\left(3^{b-a}+1\right)=2q$ mà $3 \nmid q$ nên $a=0$. Khi đó $2q=3^h-1=3^{3^p \cdot q-2p}-1$.
Ta chứng minh hai bổ đề sau:

Bổ đề 2.
Với mọi $p \in \mathbb{N}$ thì $3^p \geq 2p+1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $p=0$ hoặc $p=1$. □

Bổ đề 3.
Với mọi $q \in \mathbb{N}^*$ thì $3^p \cdot q \geq 2p+q$ với $p \in \mathbb{N}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $q=1, p=0$ hoặc $q=1, p=1$. □

Không khó để chứng minh hai bổ đề này (dùng Bổ đề 2 để chứng minh Bổ đề 3).
Theo Bổ đề 3 ta có $3^p \cdot q - 2p \geq q$ nên $2p+1 \geq 3^q$. Tuy nhiên theo Bổ đề 2 thì $3^q \geq 2p+1$.
Vậy $3^q=2p+1$ nên $p=0$ hoặc $p=1$. Ta tìm được $n=1$ hoặc $n=3$.
Vậy $n \in \{1;3\}$. ■

3.1 Đánh giá trong bài toán phương trình nghiệm nguyên có sử dụng bổ đề LTE

Bổ đề LTE là bổ đề được dùng rất nhiều trong việc giải phương trình nghiệm nguyên chứa ẩn ở số mũ. Và thường đi kèm với bổ đề là những đánh giá giữa hai vế của phương trình để từ đó tìm ra nghiệm nguyên. Ta cũng xét một số ví dụ sau:

Ví dụ 13. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương* $5^a + 1 = 3^a \cdot b$. △

Lời giải.
Nếu a chẵn thì $5^a + 1 \equiv 2 \pmod 3$, mâu thuẫn. Do đó a lẻ. Theo bổ đề LTE ta có

$$v_3\left(5^a + 1\right) = v_3(a) + v_3(5 + 1) = 1 + v_3(a) = a. \tag{13}$$

Đặt $a = 3^k \cdot p$ với $k, p \in \mathbb{N}, p \geq 1$. Ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp theo k rằng $3^k \cdot p \geq k + 2$ với $k \geq 1$. Do đó $a \geq v_3(a) + 2$ với $v_3(a) \geq 1$. Khi đó từ (13) ta suy ra $v_3(a) = 0$. Vậy $a = 1$. Ta tìm được $b = 2$.
Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương $(a, b) = (1; 2)$. ■

Ví dụ 14 (Nga 1996). *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại số nguyên dương x, y và k thỏa mãn* $\gcd(x, y) = 1, k > 1$ *và* $3^n = x^k + y^k$. △

Lời giải.
Nếu k chẵn thì để thỏa mãn phương trình ta phải có $3|x, 3|y$, điều này mâu thuẫn vì $\gcd(x, y) = 1$. Vậy k lẻ.
Ta có $x, y \geq 1$ nên từ phương trình suy ra $3|x + y$. Áp dụng bổ đề LTE ta có

$$v_3(x^k + y^k) = v_3(k) + v_3(x + y) = n.$$

Đặt $x+y = 3^m$ thì với $m \in \mathbb{N}^*$. Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp theo m rằng $3^m \geq m+2$ với mọi $m \geq 1$. Khi đó ta suy ra $k - 2 \geq v_3(k)$. Ta xét hai trường hợp:

1. Nếu $m = 1$ thì $x + y = 3$. Khi đó $x = 2, y = 1$ hoặc $x = 1, y = 2$. Phương trình trở thành $\boxed{3^n - 2^k = 1}$. Theo (1) ta tìm được $n = 2, k = 3$.

2. Nếu $m \geq 2$ thì $x+y = 3^m \geq 9$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y$. Vì $x+y \geq 3$ nên $x \geq 5$. Khi đó ta có

$$x^k + y^k > x^k \geq \frac{x + y}{2} \cdot x^{k-1} \geq \frac{1}{2} \cdot 3^m \cdot 5^{k-1} > 3^{m+k-2} \geq 3^{m+v_3(k)} = 3^n,$$

   điều này mâu thuẫn.

Vậy với $n = 2$ thì $(x, y, k) = (2; 1; 3), (1; 2; 3)$. ■

Nhận xét. Các bài toán trên, ta đã sử dụng một số đánh giá như $p^a \cdot h \geq a + p - 1$ với p nguyên tố, $a, h \in \mathbb{N}^*, m = p^a \cdot h$. Khi đó thì $m \geq v_p(m) + p - 1$.

Ví dụ 15 (Taiwan 1999). *Tìm các số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn* $(x + 1)^{y+1} + 1 = (x + 2)^{z+1}$. △

Lời giải.
Vì $x \in \mathbb{N}^*$ nên $x + 1 \geq 2$. Gọi p là ước nguyên tố của $x + 1$. Ta xét hai trường hợp:

1. Nếu p là số lẻ. Khi đó áp dụng bổ đề LTE ta có

$$v_p\left((x+2)^{z+1}-1\right)=v_p(x+1)+v_p(z+1)=v_p(x+1)\cdot(y+1)$$
$$\Rightarrow v_p(z+1)=v_p(x+1)\cdot y$$

Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng $z+1>v_p(z+1)+1$ với $p\geq 3$. Do đó $z+1>y\cdot v_p(x+1)+1\geq y+1$. Khi đó thì

$$(x+2)^{z+1}>(x+2)^{y+1}>(x+1)^{y+1}+1,$$

điều này mâu thuẫn, tức đồng nghĩa với việc $x+1$ không chứa thừa số nguyên tố lẻ.

2. Nếu p là số chẵn, ta có $x+1=2^k$ với $k\in\mathbb{N}^*$. Với $z+1$ lẻ thì $v_2\left((x+2)^{z+1}-1\right)=v_2(x+1)<v_2(x+1)\cdot(y+1)$, mâu thuẫn. Do vậy $z+1$ chẵn, áp dụng bổ đề LTE ta có

$$v_2\left((x+2)^{z+1}-1\right)=v_2(x+1)+v_2(x+3)+v_2(z+1)-1=v_2(x+1)\cdot(y+1)$$
$$\Rightarrow v_2(x-1)+v_2(z+1)-1=y\cdot v_2(x+1).$$

   - Với $k=1$ thì $x=1$. Khi đó $\boxed{3^{z+1}-2^{y+1}=1}$. Theo (1) ta tìm được $z=1,y=2$.
   - Với $k\geq 2$ thì $v_2(x-1)=1$. Khi đó thì $v_2(z+1)=y\cdot v_2(x+1)$. Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng $z+1\geq v_2(z+1)+1$ nên $z+1\geq y\cdot v_2(x+1)+1>y+1$ từ đó dẫn đến $VT<VP$, mâu thuẫn.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x,y,z)=(1;2;1)$. ■

Nhận xét. Để sử dụng bổ đề LTE một cách đúng nhất, ta phải đề ý tới điều kiện khi sử dụng. Chẳng hạn một số điều kiện như $p\nmid x, p\nmid y, p|x-y$ hay p chẵn, lẻ.

3.2 Bài tập vận dụng kĩ thuật đánh giá

Bài 1. Tìm số nguyên tố p sao cho 11^p+10^p là lũy thừa của một số nguyên dương.

Bài 2. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $3^a=2^a\cdot b+1$.

Bài 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $2^{3^z}+1=19\cdot 3^y$.

Bài 4. Tìm các cặp số nguyên dương (a,b) thỏa mãn $a^{b^2}=b^a$.

Bài 5. Tìm các số nguyên dương (a,b,m) thỏa mãn $(a+b^2)(b+a^2)=2^m$.

Bài 6. Tìm hai số nguyên dương a,b sao cho $0\leq b\leq 9$ và một trong hai điều kiện sau đây xảy ra

- $|a^b-10a-b|=2$.
- $|b^a-10a-b|=2$.

Bài 7. Tìm tất cả số nguyên dương x,y thỏa mãn $x!+y!=x^y$.

Bài 8. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $(n-1)!+1=n^m$.

Bài 9. (Turkey 2013) Tìm các số nguyên dương m,n thỏa mãn $2^n+n=m!$.

4 Một số bài toán hay, khó

4.1 Một số bài toán hay

Dưới đây xin giới thiệu với bạn đọc một số bài toán phương trình nghiệm nguyên có ẩn ở số mũ mà theo ý kiến của mình thì đây là những bài toán hay. Và kèm theo đó mình xin đưa ra một số phân tích, tìm tòi lời giải của bản thân cho những bài toán này.

Bài toán 1 (Balkan MO 2013). *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^5 + 4^y = 2013^z$.* △

Phân tích. Ý tưởng đầu tiên: Ta sẽ coi y, z có chia hết cho 5 không. Đầu, tiên, hãy xuất phát từ y vì 4^y có cơ số nhỏ. Ta cần chọn số nguyên tố p để xét mođun sao cho $p|4^5-1$ mà $4^5-1 = 11\cdot 3\cdot 31$. Ta chọn $p = 11$. Và thật may mắn rằng $11|2013^z$! Còn may mắn hơn nữa khi ta thấy chọn $p = 11$ thì số trường hợp giảm đáng kể là do $x^5 \equiv 0, \pm 1 \pmod{11}$. Và quả thật sau một quá trình thử $y \equiv r \pmod 5$ với $0 \le r \le 4$ ta suy ra $5|y$, đặt $y = 5y_1$ ($y_1 \in \mathbb{N}^*$). Phương trình trở thành

$$x^5 + (4^{y_1})^5 = 2013^z.$$

Ý tưởng tiếp theo là ta sẽ sử dụng bổ đề LTE. Để ý rằng $4^y \equiv 1 \pmod 3$ nên $x^5 \equiv 2 \pmod 3$ suy ra $x \equiv 2 \pmod 3$. Do đó thì $3|x + 4^{y_1}$ nên áp dụng bổ đề LTE ta có

$$v_3\left(x^5 + (4^{y_1})^5\right) = v_3(x + 4^{y_1}) = z.$$

Do vậy $x + 4^{y_1} = 3^z \cdot k$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Ta thử đưa ra một đánh giá giữa $x + 4^{y_1}$ với $x^5 + 4^y$ coi sao nếu $k = 1$ hoặc $11^z|k$. Từ đó ta có lời giải:

Lời giải.
Ta có $x^5 \equiv 0, \pm 1 \pmod{11}$ và $11|2013^z$ nên $4^y \equiv 0, 10, 1 \pmod{11}$. Ta xét $y \equiv r \pmod 5$ với $0 \le r \le 4, r \in \mathbb{N}$.

r	$4^r \pmod{11}$
0	1
1	4
2	5
3	9
4	3

Vì $4^y \equiv 0, 10, 1 \pmod{11}$ nên ta suy ra $r = 0$ hay $5|y$. Đặt $y = 5y_1$ với $y_1 \in \mathbb{N}^*$. Khi đó phương trình trở thành

$$x^5 + (4^{y_1})^5 = 2013^z.$$

Để ý rằng $4^y \equiv 1 \pmod 3$ và $3|2013^z$ nên $x^5 \equiv 2 \pmod 3$ suy ra $x \equiv 2 \pmod 3$. Do đó $3|x + 4^{y_1}$. Áp dụng bổ đề LTE ta có

$$v_3\left(x^5 + (4^{y_1})^5\right) = v_3(x + 4^{y_1}) = z$$

1. Nếu $x + 4^{y_1} = 3^z$ thì ta có $x^5 + 4^y < (x + 4^{y_1})^5 = 243^z < 2013^z$, mâu thuẫn.

2. Để ý phân tích $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ nên nếu $11 | x + 4^{y_1}$ thì áp dụng bổ đề LTE ta suy ra $v_{11}(x + 4^{y_1}) = z$. Khi đó ta suy ra $33^z | x + 4^{y_1}$. Áp dụng BĐT Holder thì

$$(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(x^5 + 4^y) \geq (x + 4^{y_1})^5.$$

Do đó $x^5 + 4^y \geq \dfrac{(x + 4^{y_1})^5}{16} \geq \dfrac{33^{5z}}{16} > 2013^z$, mâu thuẫn.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương. ■

Bài toán 2 (XII Olympic Revenge - 2013). *Tìm các bộ số nguyên dương (p, n, k) với p là số nguyên tố Fermat, thỏa mãn*

$$p^n + n = (n+1)^k \tag{14}$$

Số nguyên tố Fermat là số có dạng $2^{2^x} + 1$ với x là số tự nhiên. △

Phân tích. Nhìn vào phương trình, quả thật ta khó có thể sử dụng mođun hay thực hiện đánh giá. Ta thử viết lại phương trình dưới dạng

$$p^n - 1 = (n+1)\left[(n+1)^{k-1} - 1\right]$$

Để ý rằng $(n+1)^{k-1} - 1$ thì ta nghĩ ngay đến áp dụng bổ đề LTE. Tuy nhiên, ta sẽ áp dụng cho số nguyên tố p nào ?
Ta sẽ nhìn kĩ hơn một tí, $p = 2^{2^x} + 1$ nên ắt hẳn $2 | p^n - 1$ và chắc chắn rằng $v_2(p^n - 1)$ không hề nhỏ. Với việc dùng cấp dễ dàng cho ta thấy rằng $2 | n$ nên "niềm tin" của ta vào việc chọn số $p = 2$ càng tăng.

Ta thấy rằng với $k - 1$ lẻ thì $v_2(p^n - 1) > v_2(VP)$. Do đó $k - 1$ chẵn, khi đó theo bổ đề LTE ta có

$$v_2(p^n - 1) = v_2((n+1)^{k-1} - 1) \Leftrightarrow v_2(p-1) + v_2(p+1) = v_2(n+2) + v_2(k-1). \tag{15}$$

Quả thật việc đánh giá (15) không hề dễ, ta không thể dùng các đánh giá thông thường khi gặp bài toán có sử dụng bổ đề LTE như trên được. Ta sẽ đọc kĩ đề lại một lần nữa, để tìm những điều kiện để ta có thể đánh giá (15). Lại để ý một lần nữa $p - 1 = 2^\alpha$. Do đó nếu tồn tại số nguyên dương a thỏa mãn $v_2(a) \geq v_2(p-1)$ thì $p - 1 | a$. Ta thử đi so sánh $v_2(k-1)$ và $v_2(p-1)$. Ta chọn $v_2(k-1)$ thay vì $v_2(n+2)$ vì nếu đánh giá được k theo mođun $p - 1$ thì có thể áp dụng được định lý nhỏ Fermat.

Cụ thể, nếu $v_2(k-1) \geq v_2(p-1)$ thì $p - 1 | k - 1$ nên $(n+1)^k \equiv n + 1 \pmod{p}$, mâu thuẫn vì $p^n + n \equiv n \pmod{p}$. Vậy $v_2(k-1) < v_2(p-1)$ nên từ (15) ta suy ra $v_2(p+1) < v_2(n+2)$ mà $v_2(p+1) > 1$ nên $v_2(n+2) \geq 2$. Từ đó dẫn đến $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Ta đã có $n \equiv 2 \pmod{4}$, vậy bước tiếp theo ta sẽ làm gì đây ? Để ý rằng phương trình ban đầu có p^n (tức có n là số mũ) nên ta nghĩ ngay đến định lý Fermat nhỏ, và điều kiện $n \equiv 2 \pmod{4}$ sẽ đưa ta tới việc xét mođun 5.

Như vậy thì $p^n \equiv p^2 \pmod{5}$ với $p > 5$. Dễ dàng khi thấy rằng $p \equiv 4 \pmod{5}$ nên $p^n \equiv 4 \pmod{5}$. Do đó $(n+1)^k \equiv n + 4 \pmod{5}$ suy ra $k \equiv 3 \pmod{4}$ (vì k lẻ). Khi đó $(n+1)^3 \equiv n + 4 \pmod{5}$. Xét $n \equiv r \pmod{5}$ với $0 \leq r \leq 4$ thì không thỏa mãn.

Với $p = 5$ thì $5^n + n = (n+1)^k$. Ta thử dùng cấp một lần nữa và tìm được $n \equiv 0 \pmod 6$. Để ý $n \equiv 2 \pmod 4$ nên $n \equiv 6 \pmod{12}$. Một lần nữa ta lại nghĩ đến định lý Fermat nhỏ, do đó ta đi xét mođun 13. Ta có $5^n \equiv 5^6 \equiv -1 \pmod{13}$ nên $(n+1)^k \equiv n-1 \pmod{13}$. Ta thử đi tìm k theo mođun 12:

1. Vì $p = 5$ nên (15) suy ra $v_2(n+2) + v_2(k-1) = 3$ nên $v_2(k-1) = 1$ suy ra $k \equiv 3 \pmod 4$.

2. Áp dụng bổ đề LTE cho phương trình $5^n + n = (n+1)^k$ ta có

$$\begin{aligned} v_3(5^n - 1) = v_3\left((n+1)^{k-1} - 1\right) &\Leftrightarrow 1 + v_3(\tfrac{n}{2}) = v_3(n) + v_3(k-1) \\ &\Leftrightarrow v_3(k-1) = 1. \end{aligned}$$

   Vậy $k \equiv 1 \pmod 3$.

Như vậy $k \equiv 7 \pmod{12}$ nên $(n+1)^k \equiv (n+1)^7 \equiv \pm(n+1) \pmod{13}$. Như vậy $n - 1 \equiv \pm(n+1) \pmod{13}$, mâu thuẫn.

Như vậy, ta đã có hướng giải cho bài toán này. Và sau đây là lời giải đầy đủ:

Lời giải.
Đặt $\alpha = 2^x$. Nếu $n = 1$ thì (14) $\Leftrightarrow p = 2^k - 1 = 2^\alpha + 1$. Do đó $k = 2, \alpha = 1$ nên $p = 3$.
Nếu $n \geq 2$. Ta gọi r là một ước nguyên tố của n. Từ phương trình ta suy ra $p^n \equiv 1 \pmod n$ hay $p^n \equiv 1 \pmod r$. Do đó $\gcd(p, r) = 1$. Đặt k là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $p^k \equiv 1 \pmod r$. Ta cũng có theo định lý Fermat nhỏ thì $p^{r-1} \equiv 1 \pmod r$. Vậy ta suy ra $k | r - 1$ và $k | n$. Vì $\gcd(r-1, n) = 1$ nên $k = 1$. Ta có $r | p - 1$ hay $r | 2^\alpha$. Vậy $r = 2$ hay $2 | n$. Ta có

$$(14) \Leftrightarrow p^n - 1 = (n+1)\left[(n+1)^{k-1} - 1\right]$$

Từ phương trình dẫn đến $v_2(p^n - 1) = v_2\left((n+1)^{k-1} - 1\right)$.
Nếu $k - 1$ lẻ thì

$$v_2\left((n+1)^{k-1} - 1\right) = v_2(n) < v_2\left(p^2 - 1\right) + v_2(n) - 1 = v_2(p^n - 1),$$

mâu thuẫn. Vậy $k - 1$ chẵn. Áp dụng bổ đề LTE ta có

$$\begin{aligned} &v_2(p^n - 1) = v_2\left((n+1)^{k-1} - 1\right) \\ \Leftrightarrow &v_2(p^2 - 1) + v_2(n) - 1 = v_2(n) + v_2(n+2) + v_2(k-1) - 1 \\ \Leftrightarrow &v_2(p-1) + v_2(p+1) = v_2(n+2) + v_2(k-1) \end{aligned}$$

Nếu $v_2(k-1) \geq v_2(p-1)$ thì $p - 1 | k - 1$. Do đó $(n+1)^k \equiv n + 1 \pmod p$ theo định lý Fermat nhỏ. Tuy nhiên theo (5) thì $n \equiv (n+1)^k \pmod p$ nên $n \equiv n + 1 \pmod p$, mâu thuẫn. Vậy $v_2(k-1) < v_2(p-1)$. Khi đó theo phương trình ta có

$$1 \leq v_2(p+1) = v_2(2^\alpha + 2) < v_2(n+2)$$

Do đó $v_2(n+2) \geq 2$. Ta suy ra $n \equiv 2 \pmod 4$.

1. Nếu $p > 5$ thì $2^{2^x} + 1 > 5$ nên $x \geq 2$. Do đó $p \equiv 2 \pmod 5$. Áp dụng $n \equiv 2 \pmod 4$ thì ta suy ra $p^n \equiv 4 \pmod 5$. Do đó $4 + n \equiv (n+1)^k \pmod 5$. Vì $n + 4 \not\equiv n + 1 \pmod 5$ nên $k \not\equiv 1 \pmod 4$. Vì k lẻ nên $k \equiv 3 \pmod 4$. Vậy $4 + n \equiv (n+1)^3 \pmod 5$.

   - Nếu $n \equiv 0 \pmod 5$ thì $4 + n - (n+1)^3 \equiv 3 \pmod 5$, mâu thuẫn.
   - Nếu $n \equiv 1 \pmod 5$ thì $4 + n - (n+1)^3 \equiv 2 \pmod 5$, mâu thuẫn.
   - Nếu $n \equiv 2 \pmod 5$ thì $4 + n - (n+1)^3 \equiv 4 \pmod 5$, mâu thuẫn.
   - Nếu $n \equiv 3 \pmod 5$ thì $4 + n - (n+1)^3 \equiv 3 \pmod 5$, mâu thuẫn.
   - Nếu $n \equiv 4 \pmod 5$ thì $4 + n - (n+1)^3 \equiv 3 \pmod 5$, mâu thuẫn.

   Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n + 4 \not\equiv (n+1)^3 \pmod 5$. Ta loại trường hợp $p > 5$.

2. Nếu $p = 5$ thì $\alpha = 2$. Khi đó thì $3 = v_2(n+2) + v_2(k-1)$. Vì $v_2(n+2) \geq 2$ nên ta suy ra $v_2(n+2) = 2, v_2(k-1) = 1$. Ta cũng có $5^n + n = (n+1)^k$.

   - Với $n = 2$ thì $k = 3$.
   - Với $n \geq 3$. Gọi q là ước nguyên tố lẻ của n thì $q | 5^{(n,q-1)} - 1 = 5^2 - 1 = 24$. Vậy $q|3$ nên $q = 3$. Do đó $n \equiv 0 \pmod 6$. Kết hợp với $n \equiv 2 \pmod 4$ ta suy ra $5^n \equiv -1 \pmod{13}$ nên $n - 1 \equiv (n+1)^k \pmod{13}$. Áp dụng bổ đề LTE ta có

     $$v_3(5^n - 1) = v_3\left((n+1)^{k-1} - 1\right) \Leftrightarrow 1 + v_3\left(\frac{n}{2}\right) = v_3(k-1) + v_3(n)$$

     Vậy $3|k-1$. Ta cũng có $k \equiv 3 \pmod 4$ nên $k \equiv 7 \pmod{12}$. Theo định lý Fermat nhỏ ta suy ra $(n+1)^k \equiv (n+1)^7 \equiv \pm(n+1) \pmod{13}$. Như vậy $n - 1 \equiv -n - 1 \pmod{13}$ dẫn đến $n \equiv 0 \pmod{13}$, vô lý. (vì với $13|n$ thì $5^n \equiv 1 \pmod{13}$, mâu thuẫn do $5^n \equiv 5 \pmod{13}$).

Vậy $(p, n, k) = (3; 1; 2), (5; 2; 3)$. ■

Nhận xét. Đây là một bài toán hay, lời giải cho bài toán này đã áp dụng cả hai kĩ thuật mà mình đã trình bày ở trên.

Bài toán 3. *Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho*

$$10^n - 6^m = 4n^2 \tag{16}$$

△

Lời giải.
Dễ dàng chứng minh được bổ đề sau:

Bổ đề 4.
Với mọi $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$ thì $10^a > 6^a + 4a^2$. □

Thử với $n = 1, 2, 3$ ta tìm được $(m, n) = (1; 1)$. Nếu $n \geq 4$ thì theo bổ đề ta có $6^m > 6^n$ nên $m > n \geq 4$. Nếu n lẻ thì $4n^2 \equiv 4 \pmod{16}$ mà $10^n - 6^m \equiv 0 \pmod{16}$ vì $m, n \geq 4$, mâu thuẫn. Vậy n chẵn.
Ta sẽ đi chứng minh m cũng chẵn. Ta đặt $n = 2n_1$ ($n_1 \in \mathbb{N}^*$). Ta cũng có $4n^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 7$.

1. Nếu $3|n_1$ thì $3|4n^2$ nên $3|10^n$, mâu thuẫn.

2. Nếu $n_1 \equiv 1 \pmod 3$ nên $10^n \equiv 10^2 \equiv 2 \pmod 7$. Do đó $6^m = 10^n - 4n^2 \equiv 0, 1, 2, 5 \pmod 7$.

3. Nếu $n \equiv 2 \pmod 3$ nên $10^n \equiv 10^4 \equiv 4 \pmod 7$. Do đó $6^m = 10^n - 4n^2 \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod 7$.

Vậy trong mọi trường hợp $6^m \not\equiv 6 \pmod 7$. Vậy m chẵn, đặt $m = 2m_1$ ($m_1 \in \mathbb{N}^*$). Kết hợp với điều kiện $m > n \geq 4$ thì phương trình đầu trở thành

$$(16) \Leftrightarrow 2^{2n_1}\left(5^{n-1} - 2^{m_1-n_1} \cdot 3^{m_1}\right)\left(5^{n_1} + 2^{m_1-n_1} \cdot 3^{m_1}\right) = 16n_1^2$$

Đặt $n_1 = 2^q \cdot k$ với $q, k \in \mathbb{N}, k \geq 1, 2 \nmid k$ thì phương trình trở thành

$$\left(5^{n-1} - 2^{m_1-n_1} \cdot 3^{m_1}\right)\left(5^{n_1} + 2^{m_1-n_1} \cdot 3^{m_1}\right) = \frac{2^{2q+4}}{2^{2^{q+1}\cdot k}} \cdot k^2$$

Vì $m > n$ nên $m_1 > n_1$. Do đó $VT \equiv 1 \pmod 2$. Do đó $2^{2q+4} = 2^{2^{q+1}\cdot k}$ hay $q + 2 = 2^q \cdot k$. Ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng với $k \geq 3, q \geq 1$ thì $2^q \cdot k > q + 2$. Từ đó suy ra $k = 1$, điều này lại dẫn đến mâu thuẫn.
Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương $(m, n) = (1; 1)$. ■

NHẬN XÉT. Ta để ý rằng $6^m \equiv \pm 1 \pmod 7$ và $4n^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 7$ nên số mođun được lựa chọn xét ở lời giải này. Đơn giản là vì nếu ta dùng mođun 7, ta sẽ phải xét rất ít trường hợp để có thể suy ra m chẵn.

Việc suy ra $m > n$ có thể nói là rất quan trọng, nó giúp ta đánh giá một cách chặt nhất về tính chẵn lẻ của phương trình. Cụ thể là ta đã suy ra $q + 2 = 2^q \cdot k$ nhờ đánh giá đó.

Bài toán 4. *Giải phương trình nghiệm nguyên không âm*

$$11^a 5^b - 3^c 2^d = 1. \tag{17}$$

△

PHÂN TÍCH. Ý tưởng của ta khi giải bài toán này là đưa về phương trình tích (vì như thế sẽ làm giảm số ẩn cần xét, đưa phương trình về các phương trình nhỏ để dễ dàng giải quyết hơn). Và muốn làm được điều đó thì ta phải xét tính chẵn lẻ của các ẩn bằng cách sử dụng mođun.
Đầu tiên, hãy thử với các mođun quen thuộc. Để ý rằng a, b phải cùng tính chẵn lẻ khi xét theo mođun 3 (trong trường hợp này thì $c \geq 1$). Hơn nữa, theo mođun 4 (xét trong trường hợp $d \geq 2$) thì $11^a 5^b \equiv 1 \pmod 4$ suy ra $11^a \equiv 1 \pmod 4$. Do đó a chẵn nên b cũng chẵn. Vậy ta đã hoàn toàn phân tích được thành nhân tử. Bây giờ tiếp theo ta sẽ đi xét các trường hợp nhỏ mà trong quá trình tìm nhân tử ta đã "tạm thời" bỏ qua. Đó là ba trường hợp $c = 0, d = 0$ và $d = 1$.

Ta đến với trường hợp $c = 0$. Khi đó $(17) \Leftrightarrow 2^d + 1 = 11^a 5^b$. Thử với mođun 3 thì dễ thấy rằng $2^d + 1 \equiv 2 \pmod 3$ nên a, b khác tính chẵn lẻ. Điều này khiến ta khó xử khi muốn đưa phương trình này về phương trình tích. Tuy nhiên, hãy thử xét với một số mođun "gần gũi" với phương trình như $11, 5$ ta thấy $11 | 2^d + 1$ với $a \geq 1$ thì dẫn đến $2 \nmid d$, nhưng với $5|2^d+1$ (nếu $b \geq 1$) lại dẫn đến $2 \parallel d$, mâu thuẫn. Vậy khả năng $a, b \geq 1$ đã giải quyết xong. Ta xét với trường hợp $a = 0$. Khi đó

$$(17) \Leftrightarrow 5^b - 1 = 2^d.$$

Ta nghĩ đến việc giải quyết phương trình trên bằng việc sử dụng bổ đề LTE. Nếu b lẻ thì $v - 2(5^b - 1) = v_2(5-1) = 2$ nên $d = 2$. Khi đó $b = 1$. Còn nếu b chẵn thì

$$v_2(5^b - 1) = v_2(5-1) + v_2(5+1) + v_2(b) - 1 = 2 + v_2(b) \leq 1 + b,$$

điều này dẫn tới $5^b - 1 = 2^d \leq 2 \cdot 2^b$ chỉ xảy ra khi $b = 0$, nhưng lúc đó thì $2^d = 0$, mâu thuẫn. Tương tự với trường hợp $b = 0$ ta cũng dùng bổ đề LTE.

Tiếp theo là trường hợp $d = 0$. Khi đó (17) $\Leftrightarrow 11^a 5^b - 3^c = 1$, mâu thuẫn vì $VT \equiv 0 \pmod 2$ mà $VP \equiv 1 \pmod 2$.

Ta đến với $d = 1$. Khi đó (17) $\Leftrightarrow 11^a 5^b = 2 \cdot 3^c + 1$. Đầu tiên, ta thử mạnh dạn áp dụng các mođun "gần gũi" với phương trình, và để ý rằng $\text{ord}_{11}(3) = 5$ và $\text{ord}_5(3) = 4$ nên ta thử lần lượt các trường hợp đồng dư ta sẽ tìm được $c \equiv 3 \pmod 4$ và $c \equiv 3 \pmod 5$ thì $c \equiv 3 \pmod{20}$, tất nhiên lúc này ta tạm thời bỏ qua hai khả năng nhỏ là $a = 0$ và $b = 0$. Đặt $c = 20c_1 + 3$ thì phương trình trở thành

$$55\left(11^{a-1}5^{b-1} - 1\right) = 54\left(3^{20c_1} - 1\right).$$

Để ý rằng $5^2 | 3^{20c_1} - 1$ và $11^2 | 3^{20c_1} - 1$ nên ta buộc phải có $a = b = 1$. Bây giờ ta quauy lại khả năng $a = 0, b = 0$. Nếu $a = 0$ thì $5^b - 1 = 2 \cdot 3^c$, mâu thuẫn vì $v_2(5^b - 1) \geq 2$. Còn với $b = 0$ thì $11^a - 1 = 2 \cdot 3^c$ suy ra a lẻ theo bổ đề LTE, nhưng lúc đó thì $11^a - 1 \equiv 1 \pmod 3$, mâu thuẫn vì $c \geq 2, 3 | 2 \cdot 3^c$.

Lời giải.
Ta xét:
Nếu $c = 0$ thì (17) $\Leftrightarrow 2^d + 1 = 11^a 5^b$.

1. Nếu $b = 0$ thì $11^a - 1 = 2^d$. Với trường hợp a lẻ, áp dụng bổ đề LTE ta có $v_2(11^a - 1) = v_2(11 - 1) = 1$ nên $d = 1$, nhưng khi đó $11^a = 3$, mâu thuẫn. Vậy a chẵn, khi đó cũng theo bổ đề LTE thì

   $$v_2(11^a - 1) = v_2(11-1) + v_2(11+1) + v_2(a) - 1 = 2 + v_2(a) = d,$$

   Dễ dàng chứng minh theo quy nạp rằng với mọi $m \geq 1$ thì $2^m \geq m + 1$ suy ra $a \geq v_2(a) + 1$ hay $a + 1 \geq d$. Do đó $11^a - 1 = 2^d \leq 2 \cdot 2^a$. Từ trên ta dễ dàng suy ra $a = 0$ dẫn đến $2^d = 0$, mâu thuẫn.

2. Nếu $a = 0$ thì $2^d + 1 = 5^b$. Ta có $b \geq 1$. Nếu b lẻ thì áp dụng bổ đề LTE ta có $v_2(5^b - 1) = v_2(5-1) = 2$ nên $d = 2$, khi đó $b = 1$. Ta tìm được $(a, b, c, d) = (0; 1; 0; 2)$. Còn nếu b chẵn thì áp dụng bổ đề LTE ta có

   $$v_2(5^b - 1) = v_2(5-1) + v_2(5+1) + v_2(b) - 1 = 2 + v_2(b) = d,$$

   Chứng minh tương tự, ta không tìm được nghiệm trong trường hợp b chẵn.

3. Nếu $a, b \geq 1$ thì $5 | 2^d + 1$ và $11 | 2^d + 1$. Từ $5 | 2^d + 1$ ta suy ra $2 \parallel d$. Tuy nhiên từ $11 | 2^d + 1$ thì $2 \nmid d$, điều này mâu thuẫn.

Nếu $d=0$ thì (17) $\Leftrightarrow 3^c+1=11^a5^b$, mâu thuẫn vì $2|3^c+1$ nhưng $2\nmid 11^a5^b$.
Nếu $d=1$ thì (17) $\Leftrightarrow 2\cdot 3^c+1=11^a5^b$. Dễ dàng thấy rằng $c\geq 1$. Với $b=0$ thì $2\cdot 3^c+1=11^a$, vì $v_2(11^a-1)=1$ nên a lẻ, lúc đó $11^a-1\equiv 1 \pmod 3$, mâu thuẫn. Vậy $b\geq 1$. Tương tự ta cũng có $a\geq 1$. Như vậy thì $11|2\cdot 3^c+1$ và $5|2\cdot 3^c+1$. Ta có hai bảng sau:

$c \pmod 4$	$2\cdot 3^c+1 \pmod 5$
0	3
1	2
2	4
3	0

Ta suy ra $c\equiv 3 \pmod 4$. Và:

$c \pmod 5$	$2\cdot 3^c+1 \pmod{11}$
0	3
1	7
2	8
3	0

Do đó $c\equiv 3 \pmod 5$. Như vậy thì $c\equiv 3 \pmod{20}$. Ta đặt $c=20c_1+3$ với $c_1\in\mathbb{N}$. Phương trình tương đương với

$$55\left(11^{a-1}5^{b-1}-1\right)=54\left(3^{20c_1}-1\right).$$

Nếu $b\geq 2$ thì $5\parallel VT$, trong khi đó $5^2|3^{20c_1}-1$, mâu thuẫn. Vậy $b=1$. Tương tự thì $a=1$. Từ đó ta suy ra $c=3$. Vậy $(a,b,c,d)=(1;1;3;1)$. *Nếu* $d\geq 2, c\geq 1$. Ta có $4|3^c2^d$ và $5^b\equiv 1 \pmod 4$ nên $11^a\equiv 1 \pmod 4$. Ta suy ra a chẵn, từ đó dẫn đến $11^a\equiv 2 \pmod 3$. Ta cũng có $3^c2^d+1\equiv 1 \pmod 3$ nên $5^b\equiv 1 \pmod 3$. Vậy b cũng chẵn. Ta đặt $a=2a_1, b=2b_1$ $(a_1,b_1\in\mathbb{N}^*)$ thì

$$(17)\Leftrightarrow\left(11^{a_1}5^{b_1}-1\right)\left(11^{a_1}5^{b_1}+1\right)=3^c2^d.$$

Vì $\left(11^{a_1}5^{b_1}+1\right)-\left(11^{a_1}5^{b_1}-1\right)=2$ nên ta có hai trường hợp sau:

- Nếu $\begin{cases}11^{a_1}5^{b_1}-1=2\cdot 3^c\\ 11^{a_1}5^{b_1}+1=2^{d-1}\end{cases}$ thì $2^{d-1}-2\cdot 3^c=2$ hay $\boxed{2^{d-2}-3^c=1}$. Theo (2) thì ta tìm được $d=2, c=1$ nên $11^a5^b=3\times 2^2+1=13$, mâu thuẫn.
- Nếu $\begin{cases}11^{a_1}5^{b_1}-1=2^{d-1}\\ 11^{a_1}5^{b_1}+1=2\cdot 3^c\end{cases}$ thì $2\cdot 3^c-2^{d-1}=2$ hay $\boxed{3^c-2^{d-2}=1}$. Theo (1) thì $c=1, d=3$. Ta có $11^a5^b=3^1\times 2^3+1=5^2$ suy ra $b=2, a=0$. Vậy $(a,b,c,d)=(0;2;1;3)$.

Vậy phương trình (17) có nghiệm nguyên $(a,b,c,d)=(1;1;3;1),(0;1;0;2),(0;2;1;3)$. ■

Nhận xét. Để giải các bài toán dạng này, hầu hết ta phải đi tìm mođun để đưa phương trình về phương trình tích, từ đó đặt ẩn phụ. Trong thời gian đi đưa về phương trình về phương trình tích, ta nên tạm thời bỏ qua các trường hợp nhỏ. Chẳng hạn, ở ví dụ trên, muốn rút ra được a chẵn thì ta phải có $4|3\cdot 2^d$ hay $d\geq 2$, ta sẽ bỏ qua với khả năng $d\leq 1$ để tiếp tục đi tiếp với $d\geq 2$ coi phương trình có thể phân tích thành phương trình tích không, rồi từ đó mới bắt đầu quay lại xét trường hợp nhỏ (khi phương trình đã thực sự có thể được đưa về dạng phương trình tích).

4.2 Một số bài toán khó

Sau đây mình xin giới thiệu với mọi người một số bài toán khó mà mình tìm được trong các diễn đàn toán. Những bài dưới đây hầu hết đều chưa có lời giải, hoặc lời giải tìm được phải vận dụng những tính toán lớn.

Bài toán 5 (Iran 1998). *Cho số nguyên dương* a, b, x *thỏa mãn* $x^{a+b} = a^b \cdot b$. *Chứng minh* $a = x, b = x^x$. △

Bài toán 6 (AoPS). *Tìm số nguyên dương* a, b *thỏa mãn*

a) $7^a - 2^b | a^4 + 1$.

b) $6^a + 13 | b^4 + 2b^2 + 7b + 2$. △

Bài toán 7 (VMF). *Tìm mọi số nguyên không âm* a, b, c *sao cho* $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^c$. △

Bài toán 8 (VMF). *Tìm mọi số nguyên dương* a, b, c, d *sao cho* $a^{12} + b^{25} = 2011^c + 2012^d + 74$. △

Bài toán 9 (VMF). *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $1 + x + y^2 + x^3 = 1987^y$. △

Bài toán 10 (AoPS). *Tìm số tự nhiên* (a, b, c) *thỏa mãn* $(2^a + 1)(3^b + 1) = c! + 1$. △

Bài toán 11 (PEN). *Giải phương trình nghiệm nguyên dương* $10^a + 2^b - 3^c = 1997$. △

5 Nhìn lại

Qua bài viết trên, mình đã giới thiệu với mọi người hai phương pháp chủ đạo trong giải phương trình nghiệm nguyên có chứa ẩn ở số mũ.

Về phương pháp sử dụng đồng dư, ta cần chú ý linh hoạt trong việc lựa chọn mođun cho phù hợp. Đặc biệt, mình có giới thiệu thêm về hai kĩ thuật chọn các mođun "lạ". Chú ý rằng, trong quá trình phân tích và tìm tòi lời giải bài toán giải phương trình nghiệm nguyên có chứa ẩn ở số mũ, ta đặc biệt nên lấy định lý Fermat nhỏ để làm gốc mà từ đó đưa ra các phân tích có lí cho bài toán. Cụ thể, mọi người có thể tham khảo phần phân tích ở Bài toán 2, nhờ định lý nhỏ Fermat mà ta có thể chọn mođun một cách hiệu quả nhất, làm cho hướng đi thêm sáng sủa hơn.

Về phương pháp đánh giá, ta chú ý ba ý tưởng cơ bản trong đánh giá: Sắp thứ tự ẩn; sử dụng nhận xét $|A| \geq B$ nếu $B|A$ với A, B nguyên; đánh giá hai vế của phương trình thông qua các BĐT. Hơn nữa, trong việc đánh giá các phương trình sử dụng bổ đề LTE, ta chú ý hai đánh giá cơ bản:

1. Nếu $\alpha > \beta$ thì $p^\beta | p^\alpha$.

2. Ta có $p^h \cdot k \geq h + p - 1$ với $h, k, p \in \mathbb{N}^*$, p nguyên tố.

Bài viết không tránh khỏi những lỗi mắc phải, mong mọi người đóng góp ý kiến qua email: toanphamquang@yahoo.com.
Tái bút: Một để ý vui rằng trong bài viết này, có khá là nhiều bài cần sử dụng đến Ví dụ 1.

Tài liệu

[1] Art of Problem Solving.

[2] Diễn đàn toán học VMF.

[3] Amir Hossein Parvardi, *Lifting The Exponent Lemma*.

[4] Thành viên Mathscope, *Chuyên đề Số học*.

[5] Tạp chí Mathematical Reflection.